29th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD JULY 9-21 1988

Temps accordé: 4h30.

PREMIER JOUR Chaque problème vaut 7 points.

1. On se place dans le plan. On considère deux cercles de rayons respectifs R et r ($R > r$) ayant le même centre; P désigne un point fixe du cercle de rayon r et B un point variable du cercle de rayon R. La droite BP recoupe le cercle de rayon R au point C et la droite ℓ, perpendiculaire à la droite BP en P, recoupe le cercle de rayon r au point A (si ℓ est tangente au cercle, alors $A = P$).
   (I) Trouver l'ensemble des valeurs prises par $BC^2 + CA^2 + AB^2$.
   (II) Trouver l'ensemble des milieux des segments AB.

2. Soit n un entier strictement positif; $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ sont $2n+1$ sous-ensembles d'un ensemble B. On suppose vérifiées les propriétés suivantes:
   (a) Chaque ensemble A_i contient exactement $2n$ éléments.
   (b) Pour tout (i, j), $1 \leq i < j \leq 2n+1$, $A_i \cap A_j$ contient exactement un élément.
   (c) Tout élément de B appartient à au moins deux des ensembles A_i.
   Pour quelles valeurs de n est-il possible d'associer à tout élément de B la valeur 0 ou 1 de telle sorte que, dans chaque ensemble A_i, on trouve exactement n éléments affectés de la valeur 0?

3. On désigne par f l'application de l'ensemble des entiers strictement positifs dans lui-même définie par: $f(1) = 1$, $f(3) = 3$,

$$\text{et pour tout } n \geq 1, \quad \begin{cases} f(2n) = f(n), \\ f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n), \\ f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n). \end{cases}$$

   Déterminer le nombre des entiers n, $1 \leq n \leq 1988$, pour lesquels $f(n) = n$.

SECOND JOUR Temps accordé: 4h30 Chaque problème vaut 7 points.

4. Montrer que l'ensemble des réels x qui vérifient l'inéquation: $\displaystyle\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$

   est la réunion d'intervalles disjoints dont la somme des longueurs a pour valeur 1988.

5. ABC est un triangle rectangle en A et D est le pied de la hauteur issue de A. La droite joignant les centres des cercles inscrits dans les triangles ABD et ACD coupe respectivement AB et AC en K et L.
   On désigne respectivement par S et T les aires des triangles ABC et AKL.
   Montrer: $S \geq 2T$.

6. Soient a et b deux entiers strictement positifs tels que $ab+1$ divise $a^2 + b^2$.
   Montrer que $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ est un carré parfait.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail